

УДК 519.633+551.501

DOI: <https://doi.org/10.26456/2226-7719-2018-3-168-179>

СОВМЕСТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НА «ЖИДКОЙ» ГРАНИЦЕ И РАЗДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ АКВАТОРИИ БАЛТИЙСКОГО МОРЯ*

Т.О. Шелопут¹, Н.Р. Лёзина¹

¹Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, Москва

В данной работе рассматривается задача математического моделирования акваторий с «жидкими» границами. Используется математическая модель гидротермодинамики Балтийского моря, разработанная в Институте вычислительной математики РАН. Для восстановления неизвестных функций в граничных условиях используется метод вариационной ассимиляции данных. Для упрощения численного решения задачи ассимиляции используется метод разделения области, основанный на методах оптимального управления. Методы вариационной ассимиляции данных и разделения области рассмотрены на примере задачи о распространении тепла. В работе также представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: численные методы, вариационная ассимиляция данных, «жидкие» границы, метод разделения области, моделирование морских акваторий.

Введение

В настоящее время для исследования явлений и процессов, протекающих в морских акваториях, часто применяется подход, основанный на математическом моделировании. Так, например, для моделирования перемещения нефтяного пятна по поверхности моря требуются данные о гидрофизических полях (температуре, солёности, полях течений, уровне и т. д.). Существуют и другие актуальные задачи геоэкологии, в которых необходимо задание тех или иных гидрофизических параметров. Для восстановления гидрофизических полей используются математические модели соответствующих морских акваторий. В настоящее время не существует общепринятой модели, которая могла бы адекватно воспроизводить процессы, происходящие в любом реальном водоеме. Поэтому для каждого моря разрабатываются региональные модели, учитывающих их особенности. Выбор граничных

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00096 мол_а

условий на «жидких» (открытых) границах – это проблема, с которой неизбежно сталкиваются разработчики этих моделей (в данной работе под «жидкой» границей будем подразумевать границу «вода-вода» в акватории моря). При неудачном задании граничных условий или их аппроксимации поля гидрофизических параметров, получаемые в результате расчета, могут искажаться, или в результате моделирования могут возникать осцилляции, которые в природе не наблюдаются.

Существуют различные приближения, которые можно применить для задания граничных условий на «жидких» границах. Иногда используется приближение «материальной» границы – «жидкая» граница считается подвижной, и на ней задается условие непротекания. От проблемы постановки граничных условий на «жидкой» границе можно избавиться, проведя расчет по всей акватории Мирового океана – на грубой сетке вне рассматриваемой акватории, на более мелкой – внутри: при этом существенно возрастает размерность задачи, однако отсутствуют «жидкие» границы. Иногда результаты расчетов по всей акватории Мирового океана на грубой сетке используются в качестве граничных условий на «жидкой» границе. Развитием данных идей является метод вложенных сеток – с обратной связью, с неполной обратной связью и без обратной связи [4]. В некоторых региональных моделях (в частности, в модели ROMS) используются адаптивные граничные условия [12]. Еще одним распространенным приемом является использование осредненных данных о потоках через «жидкую» границу [7] или задание потоков с помощью данных наблюдений. Например, для задания баротропного потока через «жидкую границу» можно воспользоваться данными спутниковой альтиметрии [6]. Обзор современного состояния по методам ассимиляции данных в региональных моделях приведен в работе [11].

Одним из возможных подходов к выбору граничных условий является использование ассимиляции данных наблюдений. Тем не менее, существует мало работ, касающихся использования вариационной ассимиляции данных для моделей ограниченных акваторий. Это связано с тем, что применение метода общеизвестной четырехмерной вариационной ассимиляции данных напрямую к нелинейным моделям гидротермодинамики является затратной в вычислительном отношении задачей. Для существенного упрощения задачи могут использоваться такие методы, как метод расщепления (для дискретизации модели по временной переменной) и метод разделения области. Вводя разделение области на подобласти путем задания «внутренней жидкой» границы, можно добиться некоторого упрощения процедур численного решения задач в подобластях. Применение методов разделения области позволяет сводить процесс решения задачи в исходной области к поочередному их решению в подобластях, возможно, имеющих уже более простую форму, а также применять сетки, шаги которых в этих подобластях могут

отличаться по величине. Кроме того, использование метода разделения области дает возможность создания алгоритмов, пригодных для параллельных вычислений. К основным направлениям развития методов разделения области можно отнести построение новых алгоритмов для различных классов задач и эффективную их реализацию на многопроцессорных вычислительных системах. Для задач гидротермодинамики морей и океанов в работе [3] был рассмотрен подход к построению алгоритмов метода разделения области, базирующийся на теории оптимального управления, теории обратных и некорректных задач, применении сопряженных уравнений.

Целью данной работы является разработка метода решения задачи о восстановлении граничных функций на «внешней жидкой» границе (под «внешней» будем подразумевать «жидкую» границу, отделяющую моделируемую акваторию от Мирового океана) на основе методов вариационной ассимиляции (DA) и методов разделения области (DD), а также его применение в задаче моделирования гидротермодинамики Балтийского моря. В данной работе авторы опираются на результаты работ [2,3,8–10]. Так, в [2] приведена система уравнений гидротермодинамики Балтийского моря и сформулирован метод расщепления как метод аппроксимации модели по времени. Для полученной полудискретной модели поставлен класс задач о восстановлении граничных функций. В работах [8–10] приведено исследование некоторых из этих задач. В работе [3] предложен новый подход к построению методов разделения области в применении к моделям гидротермодинамики океанов и морей. В настоящей работе предложен метод решения задачи о восстановлении граничных условий на «внешних и внутренних жидких» границах для блока температуры, соответствующий подзадаче о распространении тепла, и приведены результаты численных экспериментов.

Математическая модель

Пусть в моделируемой трехмерной области D – акватории моря записана система уравнений гидротермодинамики в приближении Буссинеска и гидростатики (см. [2]). Полная система уравнений вместе с граничными и начальными условиями приведена в работах [9-10]. Границу области $\Gamma = \partial D$ мы будем представлять как объединение четырех непересекающихся частей: $\Gamma_s \equiv \Omega$ – невозмущенная поверхность моря, $\Gamma_{w,op}$ – «жидкая» часть вертикальной боковой стенки (внешняя «жидкая» граница), $\Gamma_{w,c}$ – твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H – дно моря. Пусть область D разделена поверхностью Γ_{in} (внутренней «жидкой» границей) на две подобласти D_1, D_2 . Введем характеристические функции: m_{in} – для Γ_{in} , и $m_{w,op}$ – для $\Gamma_{w,op}$.

Для аппроксимации модели по времени используется метод расщепления по физическим процессам [5], который позволяет представить решение целой нелинейной системы последовательными решениями более простых подзадач. Пусть на всем рассматриваемом интервале времени $[0, t_j]$ введена сетка $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j$. На каждом интервале времени (t_{j-1}, t_j) , $j = 1, \dots, J$ последовательно решаются следующие задачи (шаги метода расщепления):

ШАГ 1. Решается задача о распространении тепла в области D для температуры вместе с соответствующей системой граничных условий и начальным условием. После этого на последующих шагах метода расщепления (на интервале времени (t_{j-1}, t_j)) температура T не изменяется, а $T(t_j)$ берется в качестве начального состояния при решении задач на интервале (t_j, t_{j+1}) .

ШАГ 2. Решается задача конвекции-диффузии для солёности при соответствующих граничных и начальном условии. После этого солёность S на последующих шагах метода расщепления (на интервале времени (t_{j-1}, t_j)) не изменяется, а $S(t_j)$ берется в качестве начального состояния при решении задач на интервале (t_j, t_{j+1}) .

ШАГ 3. Задача об отыскании вектора скорости \vec{U} и уровня моря ξ .

Запишем задачу конвекции-диффузии для температуры с Шага 1 метода расщепления:

$$\begin{aligned} T_t + \vec{U} \nabla T - \nabla \hat{a}_T \nabla T &= f_T \quad \text{в } D \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} + \gamma_T (T - T_a) &= m_{w,op} U_n^{(-)} d_T + Q_T \quad \text{на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j), \quad (1) \\ T &= T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1} \quad \text{в } D, \end{aligned}$$

где $\hat{a}_T = \text{diag}(\mu_T, \mu_T)$, $U_n^{(-)} = (|\vec{U} \cdot \vec{n}| - \vec{U} \cdot \vec{n}) / 2$, \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к ∂D , $\partial T / \partial N_T = \vec{n} \cdot \hat{a}_T \nabla T$, Q_T – заданная на $\Gamma \times (t_{j-1}, t_j)$ функция, $\gamma_T \equiv 0$, на $\Gamma \setminus \Gamma_S \quad \forall t \in [0, t_j]$, $d_T \equiv 0$ на $(\Gamma \setminus \Gamma_{w,op}) \times (t_{j-1}, t_j)$.

Предположим, что на какой-то части Γ_{obs} границы ∂D имеются данные наблюдений за температурой T_{obs} при $t \in (t_{j-1}, t_j)$. Тогда, рассматривая функцию d_T как дополнительную неизвестную, можно сформулировать задачу ассимиляции данных о температуре на данном шаге схемы расщепления как задачу об отыскании T и d_T , удовлетворяющих системе (1) и уравнению замыкания:

$$\chi_{obs} T = \chi_{obs} T_{obs} \quad \text{на } \Gamma \times (t_{j-1}, t_j),$$

где χ_{obs} – характеристическая функция Γ_{obs} .

Задача может быть записана на каждом из множеств $D_1 \times (t_{j-1}, t_j)$, $D_2 \times (t_{j-1}, t_j)$ с введением дополнительных условий (условий сшивки) на внутренней «жидкой» границе:

$$T_1 = T_2, \quad U_n^{(-)} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} = - \left(-U_n^{(-)} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} \right) \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j), \quad (2)$$

где $T = T_1$ в D_1 , $T = T_2$ в D_2 , $N_{T,i}$ – внешняя к Γ_{in} конормаль к ∂D_i , ($i = 1, 2$). Пусть вводится дополнительная неизвестная v («управление»), как

$$v \equiv U_n^{(-)} T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial N_{T,1}} \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j), \quad (3)$$

подлежащая определению вместе с T_i , $i = 1, 2$, d_T . Отмечаем, что в силу условий (2) имеем:

$$-U_n^{(-)} T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial N_{T,2}} = -v \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j). \quad (4)$$

Также, как и в работе [10], переформулируем задачу как задачу об отыскании T_i , $i = 1, 2$, d_T , v , удовлетворяющих (1), (3), (4) и минимизирующих функционал:

$$J_\alpha \equiv \frac{\alpha_1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} m_{w,op} U_n^{(-)} (d_T - d_T^{(0)})^2 d\Gamma dt + \\ + \frac{\beta_1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \chi_{obs} U_n^{(-)} (T_1 - T_{obs})^2 d\Gamma dt + \frac{\alpha_2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} m_{in} (v - v^{(0)})^2 d\Gamma dt + \quad (5) \\ + \frac{\beta_2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} m_{in} (T_1 - T_2)^2 d\Gamma dt,$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ – некоторые постоянные, $v^{(0)}$, $d_T^{(0)}$ – заданные функции.

Варьируя функционал по $\vec{v} = (d_T, v)^T$ и считая d_T и v независимыми друг от друга, можно получить условие оптимальности и явное выражение для градиента функционала. Задачу минимизации функционала (5) можно решать, например, методом градиентного спуска, который будет иметь вид следующего итерационного процесса ($i=1,2$):

1. Решаем задачи для T_i^k , $i = 1, 2$, с заданными d_T^k , v^k

$$\left\{ \begin{array}{l} (T_i^k)_t + \vec{U} \nabla T_i^k - \nabla \hat{a}_T \nabla T_i^k = f_T \quad \text{в } D_i \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T_i^k + \frac{\partial T_i^k}{\partial N_T} + \gamma_T (T_i^k - T_a) = Q_T \quad \text{на } (\Gamma_S \cup \Gamma_H \cup \Gamma_{w,c}) \times (t_{j-1}, t_j), \\ T_i^k = T_{j-1} \quad \text{при } t = t_{j-1} \quad \text{в } D_i, \\ U_n^{(-)} T_1^k + \frac{\partial T_1^k}{\partial N_T} = U_n^{(-)} d_T^k + Q_T \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(-)} T_1^k + \frac{\partial T_1^k}{\partial N_{T,1}} = - \left(-U_n^{(-)} T_2^k + \frac{\partial T_2^k}{\partial N_{T,2}} \right) = v^k \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j); \end{array} \right.$$

2. Решаем вспомогательные («сопряженные») задачи для $(T_i^*)^k, i = 1, 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} -((T_i^*)^k)_t - \nabla \vec{U} (T_i^*)^k - \nabla \hat{a}_T \nabla (T_i^*)^k = 0 \quad \text{в } D_i \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(+)} (T_i^*)^k + \frac{\partial (T_i^*)^k}{\partial N_T} + \gamma_T (T_i^*)^k = 0 \quad \text{на } (\Gamma_S \cup \Gamma_H \cup \Gamma_{w,c}) \times (t_{j-1}, t_j), \\ (T_i^*)^k = 0 \quad \text{при } t = t_j \quad \text{в } D_i, \\ U_n^{(+)} (T_1^*)^k + \frac{\partial (T_1^*)^k}{\partial N_T} = \chi_{obs} U_n^{(-)} (T_1^k - T_{obs}) \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j), \\ U_n^{(+)} (T_1^*)^k + \frac{\partial (T_1^*)^k}{\partial N_{T,1}} = (T_1^k - T_2^k) \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_0, t_1), \\ - \left(-U_n^{(+)} (T_2^*)^k + \frac{\partial (T_2^*)^k}{\partial N_{T,2}} \right) = (T_1^k - T_2^k) \quad \text{на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j); \end{array} \right.$$

3. Находим новые приближения к функциям d_T, v

$$\begin{aligned} d_T^{k+1} &= d_T^k - \tau_k \left[m_{w,op} U_n^{(-)} \left(\alpha_1 (d_T^k - d_T^{(0)}) + \beta_1 T^* \right) \right] \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (t_{j-1}, t_j); \\ v^{k+1} &= v^k - \tau_k \left[m_{in} \left(\alpha_2 (v^k - v^{(0)}) + \beta_2 (T_1^* - T_2^*) \right) \right] \text{ на } \Gamma_{in} \times (t_{j-1}, t_j). \end{aligned}$$

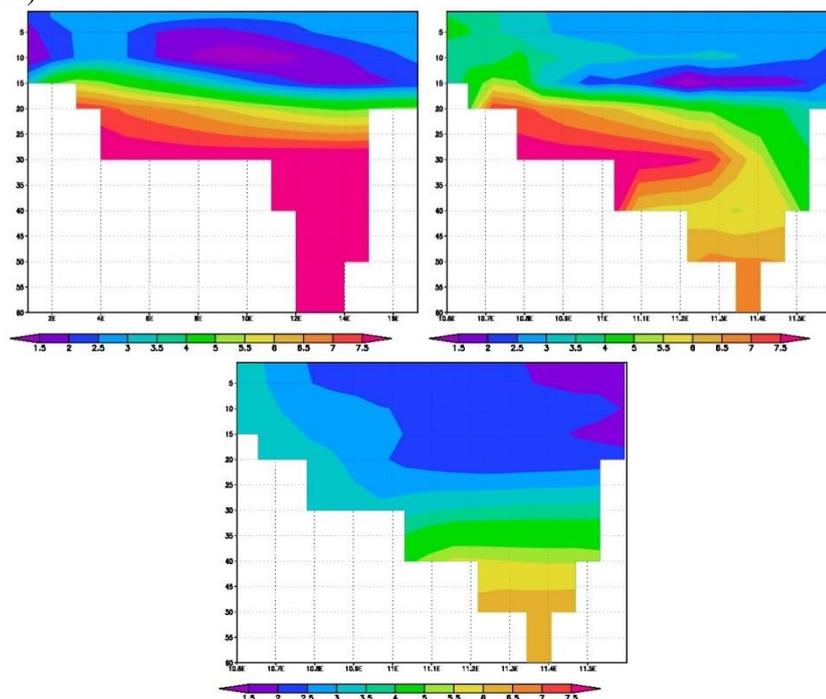
Использование приведенного итерационного алгоритма на основе метода разделения области и метода ассимиляции данных для задачи о распространении тепла позволяет решать задачи в подобластях одновременно, поскольку они являются связанными лишь на границе.

Отметим, что в данной работе рассматривается только задача о переносе тепла, однако схожий алгоритм, основанный на методах вариационной ассимиляции данных и разделения области может быть применен также и к другим подзадачам, полученным при расщеплении исходной системы уравнений.

Результаты численных экспериментов

В работе были проведены численные эксперименты для модели Балтийского моря. «Внешняя жидкая» граница располагается вблизи Датских проливов ($57^{\circ}47'49''$ с.ш.), «внутренняя жидкая» граница между Ботническим заливом и остальной частью моря ($60^{\circ}55'19''$ с.ш.). Поскольку для метода ассимиляции требуются данные о температуре на "жидкой" границе по глубине, а реальные данные наблюдений зачастую представлены лишь на поверхности моря с низким разрешением по пространству и времени, в настоящей работе в качестве данных наблюдений были использованы данные реанализа по модели Шведского института гидрологии и метеорологии (SMHI) [14–15]. Реанализ представляет собой результат расчета по модели HIROMB (High-Resolution Operational Model for the Baltic) с ассимиляцией температуры и солености методом последовательных поправок (Successive Corrections Method, SCM). Модель имеет 24 уровня по глубине, чего вполне достаточно для целей настоящей работы.

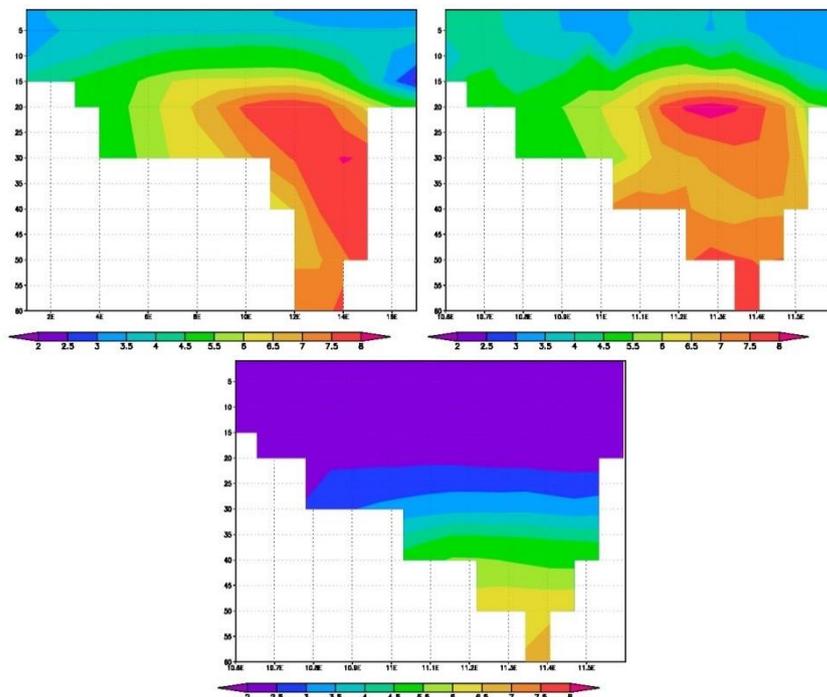
На рис. 1–3 представлены результаты моделирования температуры на «внешней жидкой» границе в разные моменты времени расчета (1, 7 и 14 дней).



Р и с. 1. Температура по глубине на «жидкой» границе при $t=1$ день: сверху слева– данные наблюдений; сверху справа– расчет с использованием DA и DD; снизу– расчет без методов DA и DD

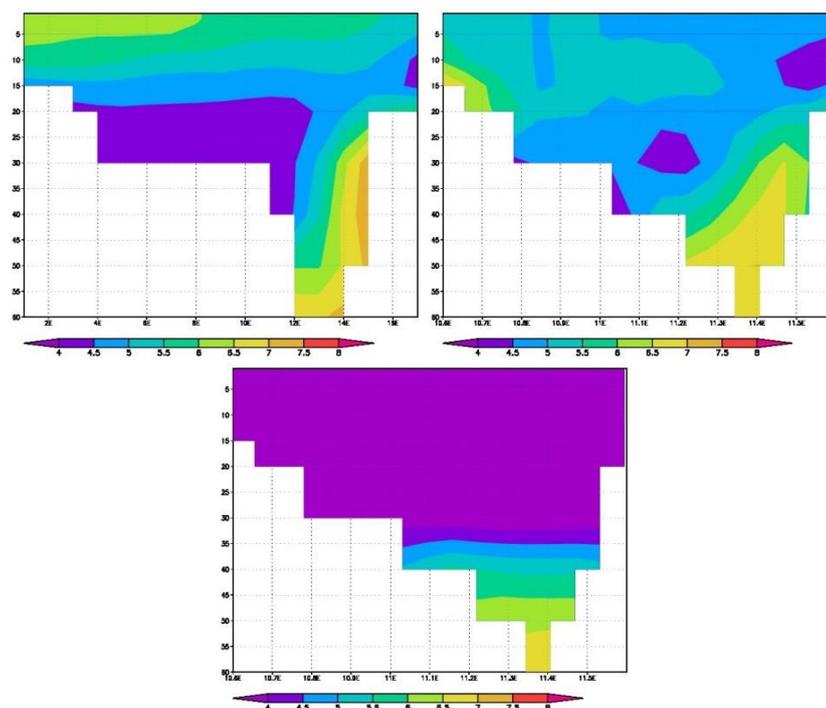
Как видно из представленных результатов, модель гидротермодинамики без применения методов разделения области и

ассимиляции данных достаточно сильно отличается от данных, которые были использованы в качестве данных наблюдений. Кроме того, можно отметить, что метод ассимиляции данных позволяет добиться хорошего соответствия вычисляемых температур по глубине и данных наблюдений.

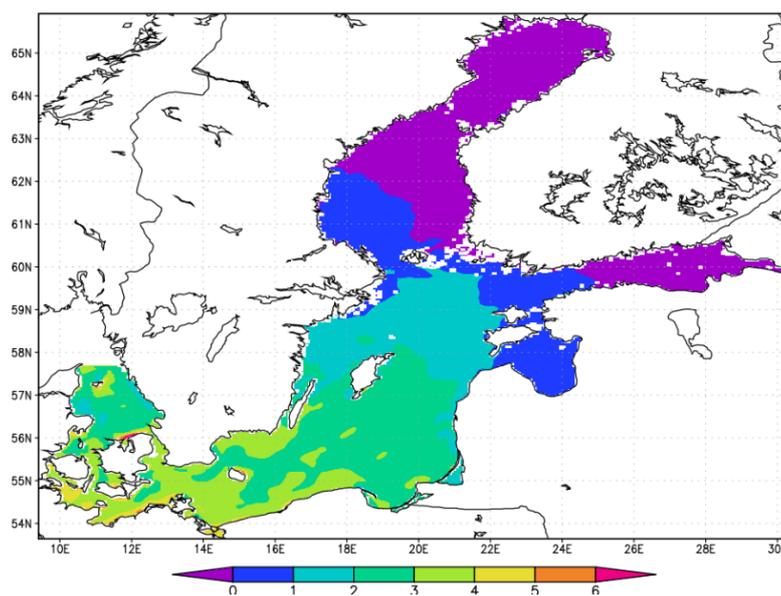


Р и с. 2. Температура по глубине на «жидкой» границе при $t=7$ дней: сверху слева– данные наблюдений; сверху справа – расчет с использованием DA и DD; снизу– расчет без методов DA и DD

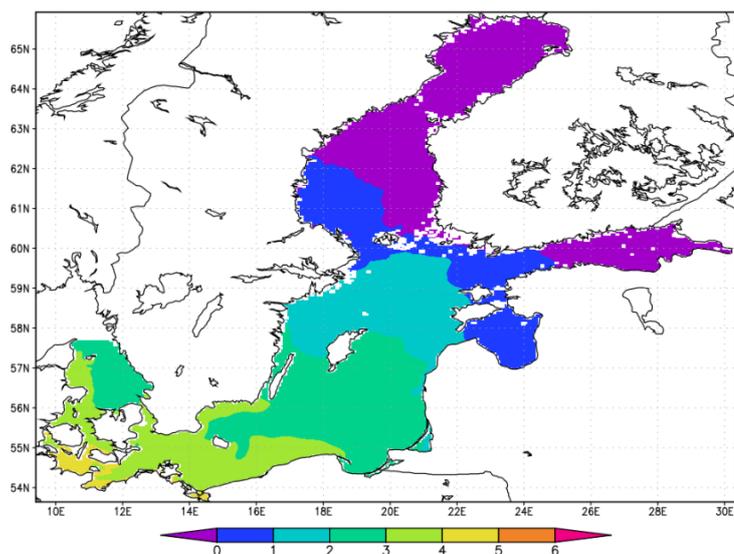
На рис. 4–5 представлены результаты моделирования температуры поверхности моря всей акватории Балтийского моря. Результаты моделирования без применения методов разделения области и ассимиляция данных практически совпадают с результатами моделирования с использованием методов DAи DDв северной части Балтийского моря, а ближе к «внешней жидкой» границе наблюдаются заметные изменения, связанные с усвоением температуры. Как было отмечено ранее данные наблюдений заметно отличаются от модельной температуры, что и влияет на результат.



Р и с. 3. Температура по глубине на «жидкой» границе при $t=14$ дней: сверху слева– данные наблюдений; сверху справа– расчет с использованием DA и DD; снизу– расчет без методов DA и DD



Р и с. 4. Температура поверхности моря с применением методов DA и DD



Р и с. 5. Температура поверхности моря без использования методов DA и DD

Заключение

В данной работе был предложен метод решения задачи о восстановлении граничных функций на «внешней жидкой» границе на основе методов вариационной ассимиляции и методов разделения области, а также был проведен ряд численных экспериментов применительно к акватории Балтийского моря. Эксперименты показали, что использование вариационной ассимиляции данных позволяет добиться лучшего соответствия вычисляемых профилей температуры по глубине и наблюдаемых профилей вблизи «внешних жидких» границ акватории Балтийского моря. Было проведено сравнение результатов численного решения задачи на всей области с решением с применением метода разделения области. Данные результаты показывают хорошее соответствие, что говорит о возможности совместной реализации методов ассимиляции данных на «жидкой» границе и разделения области.

Список литературы

1. Агошков В.И. 2016. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН. 244 с.
2. Агошков В.И. 2016. Методы решения обратных задач и задач вариационной ассимиляции данных наблюдений в проблемах крупномасштабной динамики океанов и морей. М.: ИВМРАН. 192 с.

3. Агошков В.И. Методы разделения области в задачах гидротермодинамики океанов и морей. - М.: ИВМРАН, 2017. – 192 с.
4. Кубряков А.И. Применение технологии вложенных сеток при создании системы мониторинга гидрофизических полей в прибрежных районах Черного моря // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». Вып. 11. 2004. С. 31–50.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
6. Мысленков С.А. Использование спутниковой альтиметрии для расчета переноса вод в Северной Атлантике // Труды ГУ «Гидрометцентр России». Вып. 345. 2011. С. 119–125.
7. Чернов И.А., Толстикова А.В. 2014. Численное моделирование крупномасштабной динамики Белого моря // Труды Карельского научного центра РАН. Т. 4. С. 137–142.
8. Agoshkov, V.I., Sheloput T.O. 2016. The study and numerical solution of the problem of heat and salinity transfer assuming 'liquid' boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. Vol. 31. № 2. P. 71–80.
9. Agoshkov V.I. 2017. Statement and study of some inverse problems in modelling of hydrophysical fields for water areas with 'liquid' boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2017. V. 32. № 2. P. 73–90.
10. Agoshkov V.I., Sheloput T.O. 2017. The study and numerical solution of some inverse problems in simulation of hydrophysical fields in water areas with 'liquid' boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 32. № 3. P. 147–164.
11. Edwards C.A., Moore A.M., Hoteit I., Cornuelle B.D. 2015. Regional ocean data assimilation // Annual Review of Marine Science. P. 7:6.1–6.22.
12. Marchesiello P., McWilliams J.C., Shchepetkin A. 2001. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // Ocean Modelling. V. 3. P. 1–20.
13. Zalesny V.B., Gusev A.V., Chernobay S.Yu., Aps R., Tamsalu R., Kujala P., Rytönen J. 2014. The Baltic Sea circulation modelling and assessment of marine pollution // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. V. 29. № 2. P. 129–138.
14. Baltic Sea Physics Reanalysis from SMHI (1989-2014) // Copernicus marine environment monitoring service. URL: <http://marine.copernicus.eu> (date of access: 13.03.2017).
15. SHMI open data. URL: <http://opendata-catalog.smhi.se> [Swedish].

**JOINT REALIZATION OF THE METHODS OF DATA
ASSIMILATION ON 'LIQUID' BOUNDARIES AND DOMAIN
DECOMPOSITION IN THE BALTIC SEA**

T.O. Sheloput¹, N.R. Lezina¹

¹Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow

In this paper the problem of mathematical modeling water areas with 'liquid' boundaries is considered. The mathematical model of the Baltic Sea hydrodynamics, developed in Institute of Numerical Mathematics RAS, is used. To retrieve unknown functions in boundary conditions the variational data assimilation method is used. To simplify the numerical solution of assimilation problem, domain decomposition method, based on theory of optimal control, is used. Methods of variational data assimilation and domain decomposition are considered in heat transfer problem. In this paper the results of numerical experiments are present.

Keywords: *numerical methods, variational data assimilation, 'liquid' boundaries, domain decomposition method, modeling of marine areas.*

Об авторах:

ШЕЛОПУТ Татьяна Олеговна – аспирант Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, младший научный сотрудник Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, e-mail: tania_chel@list.ru

ЛЁЗИНА Наталья Романовна – аспирант Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, младший научный сотрудник Института вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, e-mail: lezina@phystech.edu.