Вестник Тверского государственного университета.
Серия «Педагогика и психология», № 3 (60), 2022

УДК 372.851: 514
Doi: 10.26456/vtpsyped/2022.3.139

ПОЭТАПНАЯ МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Н.В. Леонтьева

ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко», г. Глазов

Изучение конструктивной геометрии способствует формированию пространственного мышления, развитию математической культуры. Применение поэтапной методики даёт возможность организовать обучение школьников решению задач на построение в пространстве. Анализ работ по методике обучения геометрии позволяет выделить основные этапы и установить взаимосвязи между ними.

Ключевые слова: *конструктивная геометрия в пространстве, методика обучения решению задач на построение, задачи на построение в пространстве.*

Развитие современной науки, в первую очередь естественнонаучных и технических областей, требует от будущих исследователей высокого уровня математической подготовки, фундамент которой закладывается в школе. Как отмечают И.Ю. Иванова, А.Д. Нахман в своей монографии [8, с. 12], у многих студентов в настоящее время наблюдается слабая мотивация к изучению математических дисциплин, что во многом определяется недостаточным уровнем школьной базы по математике. Одновременно для эффективной подготовки будущих специалистов требуется развитое пространственное, логическое мышление, умение оперировать математическими объектами. Существенной частью такой подготовки является геометрия, представляющая собой один из наиболее сложных для изучения разделов математики.

По мнению В.А. Далингера и С.Г. Кузьминой, изучение геометрии оказывает существенное влияние на развитие личности, умение доказательно обосновывать истинность утверждений в любом виде деятельности человека [3, с. 409]. В связи с этим развитие методики обучения школьников как планиметрии, так и стереометрии представляет собой актуальную задачу.

Как отмечают Е.И. Санина и О.А. Гришина, материал, включаемый в курс стереометрии, позволяет наглядно демонстрировать разнообразные объемные формы окружающей действительности [21, с. 100]. Изучение стереометрии в старших классах средней школы направлено на совершенствование умений проводить доказательства, выполнять действия с геометрическими объектами, развитие пространственного мышления.

Анализ работ как российских (В.А. Далингер [3, 4, 5], В.П. Добрица, Н.Н. Локтионова [7], Н.Г. Подаева, М.В. Подаев [17, 18, 19], Е.И. Санина, О.А. Гришина [21]), так и зарубежных (Л. Руманова, Д. Валло, В. Дурис [27], П. Лебамовский [25, 26], Н. Заранис, Дж. Экзарчакос [28], С. Кристоу, М. Питаллис [24]) исследователей даёт возможность охарактеризовать сложности, с которыми сталкиваются школьники при изучении геометрии, а тем более стереометрии. К их числу можно отнести трудности, связанные с восприятием и пониманием взаимного расположения пространственных фигур, умением дополнять заданные объекты новыми элементами.

Развитию таких умений способствует изучение методов решения задач на построение на плоскости и в пространстве. В.А. Далингер указывает, что роль таких задач заключается в развитии пространственного мышления [4, с. 40]. Сказанное определяет значимость изучения вопросов, связанных с методикой обучения решению задач на построение в пространстве.

Целью данного исследования является обоснование поэтапной методики обучения решению задач на построение в пространстве.

Для достижения поставленной цели сформулируем следующие *задачи*:

– выделить основные этапы обучения решению задач на построение в пространстве;

– охарактеризовать каждый из предложенных этапов.

Данная тема не входит в систематический курс стереометрии, в связи с этим предполагаем, что её содержание можно рассматривать в рамках элективных курсов. Для этого предварительно требуется изучить основы взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, а также определение и свойства сферы, что более подробно изложено, например, в главах 1, 2, в параграфе 3 главы 6 и в приложении «Изображение пространственных фигур» учебника Л.С. Атанасяна [13, с. 10–11].

Анализ работ Б.И. Аргунова, М.Б. Балка [1], В.А. Далингера [4, 5], А.Н. Костовского [10], М.И. Орленко [15], А.Л. Пикус [16], Я.П. Понарина [20], Н.Г. Подаевой [17, 18, 19], А.Д. Семушина [22], посвящённых вопросам обучения конструктивной геометрии, даёт возможность выделить ряд основных этапов, позволяющих организовать обучение решению задач на построение в пространстве.

В первую очередь, как отмечает М.А. Исаева, необходимо изучить основные инструменты, позволяющие выполнить построения [9, с. 146]. На плоскости чаще всего используют циркуль и линейку. Возможные варианты инструментов для пространства описаны в работе [11]. За основу примем ту же систему инструментов, что предлагает автор данной статьи, которая включает в себя линейку, плоскограф и сферограф [11, с. 23]. Содержание данных инструментов представлено в табл. 1.

Таблица 1

Основные инструменты построений в пространстве

Наименование инструмента	Содержание инструмента
Линейка	Через две различные точки пространства можно построить прямую
Плоскограф	Через три различные точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно построить плоскость
Сферограф	Можно построить сферу с центром в данной точке и радиусом, равным заданному отрезку

При этом важно подчеркнуть, что такие описанные инструменты, как плоскограф и сферограф, носят виртуальный характер и не имеют физического воплощения, в отличие от циркуля и линейки. Фактически выполнение любых пространственных построений может осуществляться в первую очередь в воображении, отмечает Г.П. Сенников [23, с. 115].

Как и в конструктивной геометрии на плоскости, с помощью линейки можно также построить отрезок и луч. Кроме того, теоремы начального курса стереометрии дают возможность расширить условия применения плоскографа. Так, например, в курсе стереометрии доказывается теорема: *через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.*

Применение данной теоремы даёт возможность выполнять построение плоскости и в том случае, если даны прямая и не лежащая на ней точка. Полное описание всех условий применения инструментов приведено в работе [11, с. 23]. В каждом из перечисленных случаев будем считать возможным построение с помощью указанных инструментов. Изучение особенностей их применения можно закрепить с помощью следующих заданий.

1. В пространстве даны четыре произвольные точки. Проведите через них всевозможные прямые. Сколько решений имеет данная задача?

2. В пространстве даны четыре произвольные точки. Проведите через них всевозможные плоскости. Сколько решений имеет данная задача?

3. В пространстве даны три точки. Проведите через них всевозможные сферы. Сколько решений имеет данная задача?

Изучение описанных выше инструментов формирует базу для выполнения пространственных построений, данный этап обучения назовём инструментальным.

На следующем этапе основное внимание обратим на возможные действия с построенными объектами.

Так, помимо инструментов Б.И. Аргунов, М.Б. Балк [1], выделяют так называемые основные построения, представляющие собой действия, которые можно выполнять с построенными фигурами. В дальнейшем аналогичные операции для пространственных объектов вслед за автором работы [11] будем называть базовыми построениями. К их числу отнесём действия, связанные с выбором точек на построенных объектах или вне их, а также с нахождением пересечения пространственных фигур [11, с. 24]:

– Б1 (можно выбрать произвольную точку, принадлежащую построенной фигуре);

– Б2 (можно выбрать произвольную точку, не принадлежащую построенной фигуре);

– Б3 (можно выбрать любое конечное число точек, принадлежащее пересечению двух построенных фигур);

– Б4 (можно построить линию пересечения двух плоскостей);

– Б5 (можно построить линию пересечения плоскости и сферы);

– Б6 (можно построить линию пересечения двух сфер).

Первые три базовых построения представляют собой обобщение предложенных Б.И. Аргуновым и М.Б. Балком [1, с. 20] на пространственный случай. Остальные три базовых построения дают возможность находить результат пересечения построенных фигур, содержащий бесконечное число точек.

Г.П. Сенников предлагает подобные утверждения вводить как аксиомы. Такая возможность обусловлена, по мнению автора, тем, что главным при решении задач на построение становятся не аксиомы, а геометрическое содержание текста задачи [23, с. 112]. Для закрепления можно предложить следующие упражнения:

1. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D; через A, B, C проведена плоскость α. На построенной плоскости α выберите произвольную точку M. Постройте прямую MD.

2. В условиях предыдущей задачи выберите точку N по другую сторону плоскости от точки D вне прямой MD. Можно ли через точки M, N, D провести плоскость? Найдите линию пересечения плоскостей ABC и MND, если таковая существует. Докажите её существование.

3. Постройте точку пересечения прямой ND и плоскости α. Какое утверждение позволяет выполнить такое построение?

4. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D; через A, B, C проведена плоскость α. Постройте сферу Ω_1 *с центром в точке C и радиусом CD, а также* Ω_2 *с центром в точке D и радиусом AD. Пересекаются ли данные сферы, а также сфера* Ω_2 *с плоскостью ABC?*

Обоснуйте ваше решение.

При выполнении данных упражнений следует обратить внимание обучающихся на те средства, которые применяются при их решении. Сопровождение каждого шага указанием на инструмент или базовое построение позволяет обосновать получаемый результат, что способствует формированию у обучающихся представлений о взаимном расположении различных пространственных объектов. Прежде чем переходить к изучению базовых построений, желательно вспомнить условия, позволяющие определить существование пересечения построенных фигур.

Поскольку к применению инструментов на рассматриваемом этапе добавляется выполнение операций над ними, в первую очередь нахождение пересечения объектов, то назовём его *операционным*.

Далее Б.И. Аргунов, М.Б. Балк [1, с. 29], Г.П. Сенников [23, с. 117] выделяют так называемые элементарные построения, которые представляют собой простейшие задачи на построение и могут использоваться для решения других более сложных задач.

Основой для их изучения может служить классификация, опирающаяся на применяемые при решении инструменты и базовые построения. Все элементарные построения разделим на две группы: основные и опосредованные. К первой группе отнесём те задачи, для решения которых используют только инструменты и базовые построения. В качестве примера приведём следующие:

– построение плоскости, проходящей через середину данного отрезка и перпендикулярной к нему;

– построение отрезка, равного данному;

– построение середины данного отрезка;

– построение линейного угла, равного данному;

– построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через заданную точку.

Ко второй группе отнесём задачи, для решения которых применяются в том числе и основные задачи, например:

– построение перпендикуляра к данной прямой, проходящего через точку, не лежащую на этой прямой;

– построение прямой, параллельной данной;

– построение двугранного угла, равного данному;

– построение плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через точку, не лежащую на данной плоскости.

Можно привести примеры и других элементарных построений, относящихся к данным группам, их список не является однозначным и может быть дополнен.

Задачи, относящиеся к первой группе, фактически представляют собой наиболее простые задания на построение в пространстве. При этом можно ориентироваться на стандартную схему решения задачи на построение, включающую в себя анализ, построение, доказательство и исследование [1, 3]. Разбор подобных примеров даёт возможность не только рассмотреть ход рассуждений при выполнении пространственных построений, но и демонстрирует особенности применения указанной схемы, в первую очередь связанные с невозможностью физической реализации построения.

После изучения основных элементарных построений можно предложить учащимся рассмотреть опосредованные, для решения которых применяются введённые ранее построения. На этом этапе у обучающихся формируются базовые представления о методах решения задач на построения, назовем его этапом элементарных построений.

Описанные выше инструменты, базовые и элементарные построения применим для решения задач на построение, содержание которых может быть самым различным. В качестве примера можно привести следующие задачи [2, 14]:

1. Постройте треугольную пирамиду, если известны длины шести её рёбер.

2. Постройте касательную плоскость к данной сфере, проходящей через заданную точку, не лежащую на сфере.

3. Постройте две параллельные плоскости, содержащие скрещивающиеся прямые.

4. Постройте сферу, вписанную в данную треугольную пирамиду.

5. Через точку M провести плоскость, равноотстоящую от трёх данных точек A, B, C.

Задачи соответствующей тематики предложены, например, в пособиях [2, 5, 14, 12]. На данном этапе, который назовём задачным, систематизируются, обобщаются и закрепляются ранее формируемые представления о пространственных построениях, что определяет уровень их развития в соответствии с числом, разнообразием и сложностью рассмотренных задач. В рамках данного этапа можно изучить различные методы решения задач на построение. К их числу можно отнести метод геометрических мест точек, метод геометрических преобразований.

Следующим опишем конструктивный этап, связанный с применением средств информационно-коммуникационных технологий для реализации плана построения.

Фактически подобное описание, выполняемое с помощью инструментов, базовых и элементарных построений и совершаемое в воображении, представляет собой основную часть решения задачи. При этом физическое выполнение построения в принципе невозможно. В этом случае обучающиеся выполняют мысленный эксперимент с пространственными фигурами. В.А. Далингер указывает, что выполнение различных преобразований с геометрическими объектами способствует развитию пространственного воображения учащихся [6, с. 437]. Но применение различных средств, позволяющих получить изображения построенных фигур, даёт возможность лучше представить исходные и искомые фигуры в задаче. О значимости наглядности при изучении стереометрии говорят С. Кристоу, М. Питалис [24] и П. Лебамовский [26]. Создание изображений построенных фигур позволяет кроме того проверить правильность предложенного плана решения задачи. Одним из способов представить результаты построения может быть применение схематичных чертежей. Их применение облегчает работу воображения, а также способствует развитию пространственного мышления, указывает А.Д. Семушин [22, с. 156]. Однако подобные иллюстрации не отличаются строгостью правил выполнения, что может вызвать определённые трудности при их подготовке.

Уровень развития информационных технологий в настоящее время позволяет использовать различные математические пакеты для визуализации пространственных инструментов. В частности, в данной работе за основу возьмём динамическую программу GeoGebra, которую можно использовать для демонстрации основных инструментов (рис. 1).

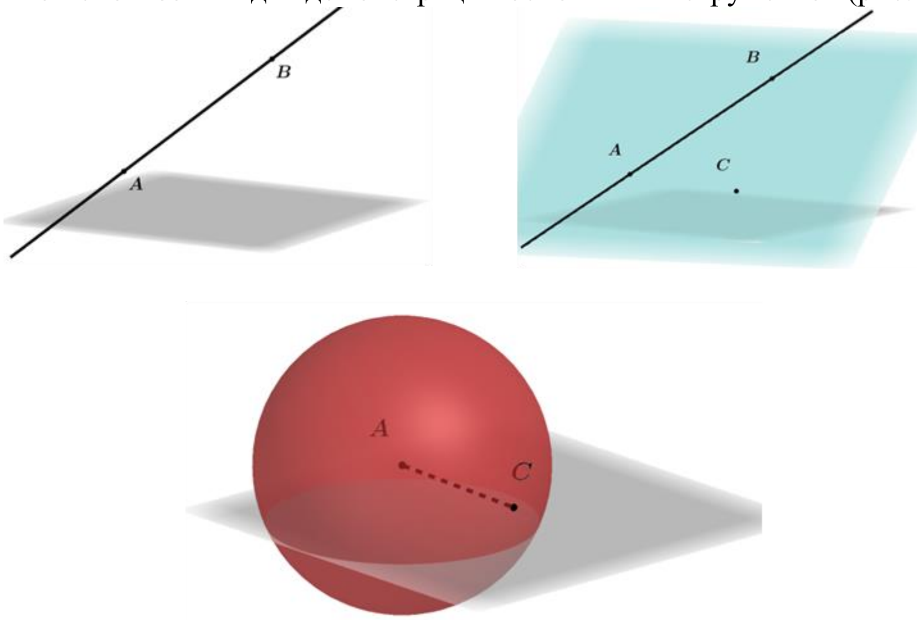

Рис. 1. Результаты применения основных инструментов

Применение приложения GeoGebra позволяет не только строить прямые, плоскости и сферы, но и находить результаты их пересечения, если таковые существуют. Соответственно, возможно последовательно реализовать описанные при решении задачи шаги построения. Полученное изображение можно не только рассмотреть с различных ракурсов, но и отредактировать таким образом, чтобы оно наиболее наглядно представляло построенные объекты.

Инструменты, базовые и элементарные построения находятся между собой в следующей взаимосвязи (рис. 2).

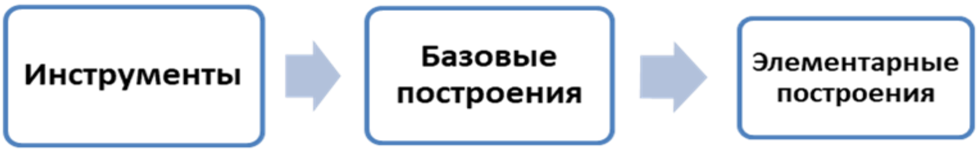

Рис. 2. Связь между основными понятиями конструктивной геометрии в пространстве

Фактически базовые построения можно применять только в том случае, когда в пространстве построены некоторые объекты с помощью инструментов, а элементарные предполагают использование и тех, и других. Соответственно, все изученные ранее основы конструктивной геометрии в пространстве применяются для решения задач. Описанная связь между указанными понятиями определяет логику изучения конструктивной геометрии в пространстве.

Выделенный конструктивный этап в некотором смысле является независимым и может рассматриваться не только после каждого из остальных, но и одновременно с ними (рис. 3).

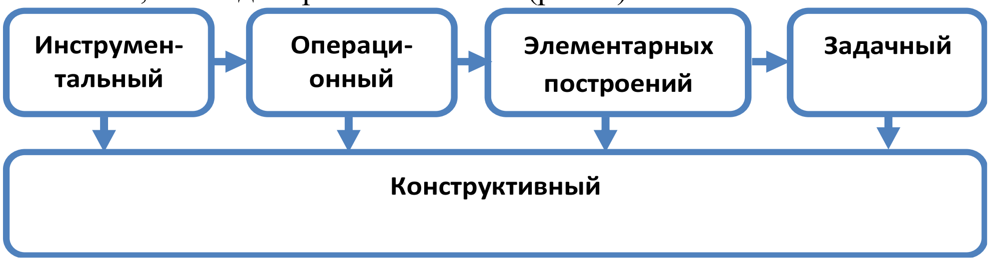

Рис. 3. Схема поэтапной методики обучения конструктивной геометрии в пространстве

Обучение решению задач на построение в пространстве может быть проведено в соответствии со следующими этапами: инструментальным, операционным, элементарных построений, задачным и конструктивным. Инструментальный этап направлен на изучение основных инструментов пространственных построений, формирует базу для решения задач. На следующем – операционном – этапе рассматриваются так называемые базовые построения, которыми описаны основные действия с построенными фигурами. На этапе элементарных построений разбираются простейшие задачи, которые могут быть использованы при решении более сложных заданий. Их можно разделить на две группы. Первоначально изучаются основные построения, для решения которых применяются только инструменты и базовые построения, а затем опосредованные, использующие решенные задания первой группы. Задачный этап направлен на обобщение и систематизацию представлений о решении задач на построение в пространстве на основе изученных ранее инструментов, базовых и элементарных построений.

Выделенные этапы образуют линейную структуру, поскольку каждый из них опирается на результаты обучения на предыдущих. Конструктивный этап может осуществляться параллельно с остальными, что позволяет наглядно представить результаты построений с помощью прикладных математических пакетов.

Организация обучения конструктивной геометрии в пространстве на основе описанной поэтапной методики сохраняет логику изложения её теоретических основ, а также позволяет последовательно расширять и дополнять изучаемый материал. В таком случае создаются условия для формирования представлений о методах решения задач на построение в пространстве, пространственного мышления и развития математической культуры.

Список литературы

1. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1957. 268 с.
2. Горшкова Л.С., Марина Е.В. Геометрические построения: учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов. Пенза: Изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2008. 140 с.
3. Далингер В.А., Кузьмин С.Г. Геометрическое образование в российской школе // Международный журнал экспериментального образования. 2015. № 3. С. 408–411.
4. Далингер В.А. Геометрия: планиметрические задачи на построение: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2021. 155 с. Режим доступа: https://urait.ru/bcode/473822 (дата обращения: 28.03.2022).
5. Далингер В.А. Геометрия: стереометрические задачи на построение: учебное пособие для среднего профессионального образования. М.: Юрайт, 2021. 189 с. Режим доступа: https://urait.ru/bcode/473295 (дата обращения: 28.03.2022).
6. Далингер В.А. Проблемы и основные направления совершенствования школьного геометрического образования // Международный журнал экспериментального образования. 2015. № 3. С. 436–437.
7. Добрица В.П., Локтионова Н.Н. Актуальные проблемы обучения изображению пространственных фигур в курсе геометрии // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. 2020. № 1 (53). С. 204–208.
8. Иванова И.Ю., Нахман А.Д. Реализация Концепции развития математического образования в деятельности образовательных организаций: монография. «Инновации в образовании». Специальный выпуск. М.: Издательская платформа Российской академии естествознания,

2016. 84 с.
9. Исаева М.А. О некоторых аспектах решения задач на построение циркулем и линейкой // Психолого-педагогический взгляд на профессиональноориентированное образование: сб. статей по итогам международной научно-практической конференции (Оренбург, 26 октября 2017) в 2 ч. Ч. 1. Стерлитамак: АМИ, 2017. 202 с. С. 146–148.
10. Костовский А.Н. Геометрические построения одним циркулем на плоскости и одним лишь сферографом в пространстве. М.: Наука, 1989. 108 с.
11. Леонтьева Н.В. Теоретические основы конструктивной геометрии в пространстве // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики: сборник научных и научно-практических статей VII Всероссийской научно-практической конференции, 26–27 ноября 2021 г. Глазов: ГГПИ, 2022. С. 19–25.
12. Лоповок Л.М. Сборник стереометрических задач на построение: учеб. пособие для учителей средней школы. М.: Государственное учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1950. 72 с.
13. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян [и др.]. М.: Просвещение, 2018. 256 с.
14. Наумович Н.В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1962. 152 с.
15. Орленко М.И. Решение геометрических задач на построение: пособие для учителей средней школы. Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1958. 440 с.
16. Пикус А.Л. Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.00. Ленинград, 1955. 344 с.
17. Подаева Н.Г., Подаев М.В. Освоение ценностного содержания геометрических понятий школьниками при обучении математике: социокультурный подход // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2018. № 1. С. 35–47.
18. Подаева Н.Г., Подаев М.В., Агафонов П.А. Развитие деятельности одаренных школьников по овладению геометрическими понятиями в образных структурах // Психология образования в поликультурном пространстве. 2021. 2(54). С. 89–96.
19. Подаева Н.Г., Подаев М.В., Агафонов П.А. Формирование понятий в процессе обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2019. № 6. С. 10–25. Режим доступа: https://e-koncept.ru/2019/June.htm (дата обращения: 28.03.2022).
20. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, 2006. 256 с.
21. Санина Е.И., Гришина О.А. Развитие пространственного мышления в процессе обучения стереометрии // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Психология и педагогика. 2013. № 4. С. 99–102.
22. Семушин А.Д. Методика обучения решению задач на построение в пространстве. М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР,

1959. 156 с.
23. Сенников Г.П. Задачи на построение в школьном курсе стереометрии // Вопросы методики преподавания стереометрии: сб. статей под ред. В.В. Репьева. Горький: Горьковская правда, 1961. 160 с. С. 111–160.
24. Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., Pitta, D., Jones, K., Sendova, E., Boytchev, P. Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry. Paper presented at the 8 th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT8), Hradec Králové, Czech Republic, July 1–4, 2007.
25. Lebamovki P. Model of a stereoscopic system for stereometry training in middle and upper course // Science Series "Innovative STEM Education", Volume 2, 2020. P. 70–78.
26. Lebamovski P., Petkov E. Usage of 3d technologies in stereometry training. Proceedings of CBU in Social Sciences, 1, 139–145. DOI: https://doi.org/10.12955/pss.v1.61.
27. Rumanova L., Vallo D., Duris V. Didactical Phenomena of Unusual Geometry Tasks in Teaching of Stereometry // Procedia – Social and Behavioral Sciences, Volume 186, 13 May 2015. Pages 354–358.
28. Zaranis N., Exarchakos G. M. How ICT Affects the Understanding of Stereometry Among University Students. International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies (IJWLTT), 13(1), 37–49. DOI: http://doi.org/10.4018/IJWLTT.2018010103

Об авторах:

ЛЕОНТЬЕВА Наталия Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики, ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко» (427621, Глазов, ул. Первомайская, 25), e-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

PHASED SOLID CONSTRUCTION TASKS SOLVING METHODS

N.V. Leontyeva

Glazov State Pedagogical Institute by V.G. Korolenko, Glazov

Constructive geometry learning promotes spatial thinking forming, mathematical culture development. Phased methods allow to organize solid constructive tasks solving teaching of students. Geometry learning methods article analysis gives the opportunity to highlight mains stages and to establish communication between its.

Keywords*: solid constructive geometry, constructive tasks solving methods, solid constructive tasks.*